Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

Parte VII

La Integral de Poisson

Ing. Ramón Abascal

Profesor Titular de Análisis de Señales y Sistemas
y Teoría de los Circuitos II
en la UTN, Facultad Regional Avellaneda
Buenos Aires, Argentina

2006

7. La Integral de Poisson y el Problema de Dirichlet.

7.1 - El Problema de Dirichlet:

El *Problema de Dirichlet*, de extensa aplicación en el campo de la Física, consiste en hallar una función, armónica en el interior de un cierto dominio, y tal que satisfaga determinadas *Condiciones de Contorno* en la frontera del mismo.

Por ejemplo, dado un cilindro metálico relleno de material dieléctrico, nos permite conocer cual será la distribución del potencial en el dieléctrico, expresada como una función armónica en coordenadas polares, u (ρ, ϕ), al aplicar un determinado potencial en la superficie externa (Frontera), del cilindro, De manera similar, nos dirá cómo se propaga el calor sobre una lámina conductora indefinida al existir en su borde una determinada temperatura.

La solución de tal problema puede asumir la forma de una serie indefinida de potencias, con lo cual obtenemos una solución aproximada del problema, salvo en algunos casos en que la serie se limita a un número reducido de términos. Pero también es posible hallar una solución exacta, debida a Poisson, y que se conoce justamente como Integral de Poisson.

Para hallar la expresión de la *Integral de Poisson*, partiremos del desarrollo en serie de una función analítica cuya parte real sea justamente la función armónica buscada.

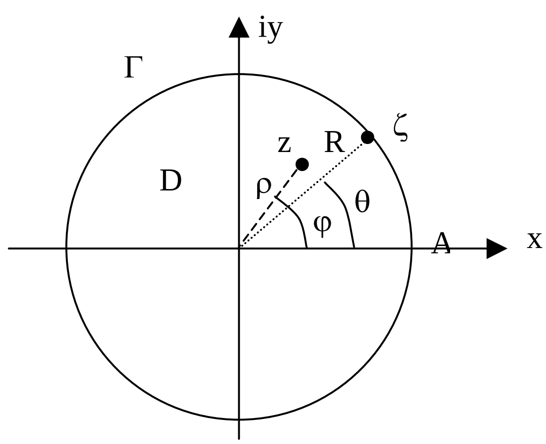
7.2 - Desarrollo en Serie de Potencias de una función de variable compleja, expresada en coordenadas polares:

Consideremos un dominio D, constituido por los puntos z interiores al mismo, incluidos los que pertenecen a su frontera Γ, y que para distinguirlos vamos a denominar con la letra ζ. Consideraremos asimismo una función f (z), analítica en el dominio, cuya parte real, que llamaremos u, será en consecuencia la función armónica buscada. Expresadas en coordenadas polares, las variables z y ζ responderán a las siguientes fórmulas:

$$z^n = \rho^n e^{i n \varphi}$$

y

$$\zeta^n = R^n e^{i n \theta}$$



La función f, en el punto frontera ζ de coordenadas polares R y θ, está definida como:

$$f(\zeta) = u(R, \theta) + i\, v(R, \theta)$$

Para el punto z, dado que queremos establecer el valor de la función en el interior del dominio en relación con el valor de la misma en los puntos frontera, y teniendo en cuenta la relación:

$$\frac{z^n}{\zeta^n} = \frac{\rho^n e^{i n \varphi}}{R^n e^{i n \theta}} = \frac{\rho^n}{R^n} e^{i n (\varphi - \theta)}$$

podemos definirla como:

$$f(z) = u\left(\frac{\rho}{R}, \varphi - \theta\right) + i\, v\left(\frac{\rho}{R}, \varphi - \theta\right) \qquad (7.1)$$

En caso que tomemos como referencia el punto A (ver la figura), y como escala el valor del radio R, es decir, $\theta = 0$ y $R = 1$, la función en cualquier punto interior del dominio será:

$$f(z) = u(\rho, \varphi) + i\, v(\rho, \varphi) \qquad (7.2)$$

Si desarrollamos f (z) en serie de potencias, tenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

donde tanto los coeficientes como la función son complejos que expresaremos de la siguiente forma:

$$a_n = \alpha_n + i\, \beta_n.$$

y

$$z^n = \left(\frac{\rho}{R}\right)^n e^{i n (\varphi - \theta)}$$

Reemplazando en la serie, obtenemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\, \beta_n) \left(\frac{\rho}{R}\right)^n e^{i n (\varphi - \theta)}$$

Si desarrollamos la exponencial que aparece en el segundo miembro como suma de senos y cosenos, obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\, \beta_n) \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [\cos n(\varphi - \theta) + i \operatorname{sen} n(\varphi - \theta)]$$

Ahora separaremos esta serie en otras dos, una que agrupe a todos los términos reales y la otra a los imaginarios:

$$Re\,\{ f(z) \} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \operatorname{sen} n\varphi)$$

e $$Im\,\{ f(z) \} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n (\alpha_n \operatorname{sen} n\varphi + \beta_n \cos n\varphi)$$

La parte real de f (z) es, según la (7.1):

$$Re\,\{ f(z) \} = u\left(\frac{\rho}{R}, \varphi - \theta \right)$$

Y por tanto

$$u\left(\frac{\rho}{R}, \varphi - \theta \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n [\alpha_n \cos n(\varphi - \theta) - \beta_n \operatorname{sen} n(\varphi - \theta)]$$

Veremos a continuación que conocida la parte real de f (z), es decir, $u(\rho, \varphi)$ es posible determinar los valores de los coeficientes α_n y β_n, lo que nos permitirá definir completamente la serie. Para ello, en la última igualdad hagamos $\rho = R$ y $\theta = 0$:

$$u(1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \operatorname{sen} n\varphi = u(\varphi) \qquad (7.3)$$

Recordemos la expresión trigonométrica de la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

Para comparar ambas series, y por semejanza, hallar fórmulas que nos permitan calcular el valor de los coeficientes, pondremos $\omega_0 = 1$. Al compararlas, deducimos que:

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$\alpha_n = a_n \qquad \text{y} \qquad \beta_n = -b_n$$

Es decir que podremos obtener los valores de α_n y de β_n utilizando las fórmulas siguientes, equivalentess a las que corresponden al cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi)\, d\varphi$$

$$\alpha_n = a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi$$

$$\beta_n = -\, b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \operatorname{sen} n\varphi \, d\varphi$$

Reemplacemos ahora estos coeficientes en la serie (7.3), para lo cual, la modificaremos previamente de la siguiente forma: Volveremos a multiplicar cada término por ρ^n, lo que obviamente no modifica el valor de los coeficientes, y además extraemos el primer término, de orden 0, en ambas sumatorias. Nótese que en la sumatoria derecha el término de orden cero es nulo porque sen 0 = 0. Con todo esto queda finalmente:

$$u(\rho, \varphi) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \rho^n \cos n\varphi - \beta_n \rho^n \operatorname{sen} n\varphi \qquad (7.4)$$

$u(\rho, \varphi)$ representa la función buscada, desarrollada como una serie de potencias, y expresada en coordenadas polares.

Ahora sí reemplazaremos los coeficientes por sus respectivos valores, obtenidos aquí arriba. Es decir:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi)\, d\varphi \;+$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(\cos n\varphi \int_0^{2\pi} u(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi + \operatorname{sen} n\varphi \int_0^{2\pi} u(\varphi) \operatorname{sen} n\varphi \, d\varphi \right)$$

(7.5)

Esta es una solución al Problema de Dirichlet. Pero es una solución aproximada, pues consta de infinitos términos. Sin embargo, puede en ciertos casos llegar a ser una solución exacta, cuando la serie se reduce a un número finito de términos. En los apartados que siguen deduciremos la Integral de Posisson que, por el contrario, constituye una posible solución exacta al problema.

No obstante, en muchos casos la dificultad para calcular dicha integral hace necesario conformarse con el desarrollo en serie.

7.3 - La Integral de Poisson.

En primer lugar, en la ecuación (7.5) haremos un cambio de variable de integración que nos permita introducir los términos $\cos n\varphi$ y $\operatorname{sen} n\varphi$ bajo el signo integral:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)\, d\theta \;+$$

$$+\;\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(\int_0^{2\pi} u(\theta)\cos n\theta \,.\, \cos n\varphi \; d\theta \;+\; \int_0^{2\pi} u(\theta)\,\mathrm{sen}\, n\theta \,.\, \mathrm{sen}\, n\varphi \; d\theta \right)$$

Seguidamente cambiaremos el orden entre la sumatoria y la integral, lo que conduce a una nueva forma:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \,(\cos n\theta \,.\, \cos n\varphi \;+\; \mathrm{sen}\, n\theta \,.\, \mathrm{sen}\, n\varphi) \right) u(\theta)\, d\theta$$

El término que aparece entre paréntesis en el segundo miembro es justamente el coseno de la diferencia de dos ángulos:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\theta - \varphi) \right) u(\theta)\, d\theta \qquad (7.6)$$

Advirtamos al llegar aquí que la expresión

$$\rho^n \cos n(\theta - \varphi)\,,$$

no es otra cosa que la parte real de

$$\rho^n e^{in(\theta-\varphi)}\,,$$

es decir: $\rho^n \cos n(\theta - \varphi) = Re\,\{\rho^n e^{in(\theta-\varphi)}\}$

Si reemplazamos este valor en la ecuación (7.6), obtendremos:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + Re \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n e^{in(\theta-\varphi)} \right) u(\theta)\, d\theta \qquad (7.7)$$

Recordemos también que el valor de una suma infinita y convergente de potencias responde a la igualdad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Restando el primer término de la serie, se puede escribir en reemplazo de la anterior:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

Aplicando este resultado a la sumatoria que aparece en el integrando de la (7.7), hallamos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \; e^{in(\theta-\varphi)} = \frac{1}{1-\rho\; e^{i(\theta-\varphi)}} - 1 = \frac{\rho\; e^{i(\theta-\varphi)}}{1-\rho\; e^{i(\theta-\varphi)}}$$

$$\therefore \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \; e^{in(\theta-\varphi)} = \frac{\rho\,[\cos(\theta-\varphi)+i\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)]}{1-\rho\,[\cos(\theta-\varphi)+i\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)]}$$

A continuación igualaremos las partes reales de los dos términos de esta ecuación:

$$\mathit{Re}\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \; e^{in(\theta-\varphi)} = \mathit{Re}\,\frac{\rho\,[\cos(\theta-\varphi)+i\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)]}{1-\rho\,[\cos(\theta-\varphi)+i\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)]}$$

$$= \mathit{Re}\,\frac{\rho\,[\cos(\theta-\varphi)+i\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)]\,\{1-\rho\,[\cos(\theta-\varphi)-i\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)]\}}{[1-\rho\cos(\theta-\varphi)]^2+[\rho\,\mathrm{sen}(\theta-\varphi)]^2}$$

$$= \frac{\rho\cos(\theta-\varphi)-\rho^2\,[\cos^2(\theta-\varphi)+\mathrm{sen}^2(\theta-\varphi)]}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2\,[\cos^2(\theta-\varphi)+\mathrm{sen}^2(\theta-\varphi)]}$$

$$= \frac{\rho\cos(\theta-\varphi)-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}$$

Si reemplazamos este valor en la (7.6), verificamos que:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\rho\cos(\theta-\varphi)-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\right)u(\theta)\,d\theta$$

Al efectuar la suma indicada en el integrando, resulta:

$$u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2+2\rho\cos(\theta-\varphi)-2\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}\right)u(\theta)\,d\theta$$

Simplificando y teniendo en cuenta que el coseno es una función par: $\cos(\theta-\varphi)=\cos(\varphi-\theta)$, llegamos finalmente a la fórmula,

Integral de Poisson

$$\boxed{u(\rho,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}\,u(\theta)\,d\theta} \qquad (7.8)$$

conocida como *Integral de Poisson*. La expresión que aparece en el integrando se denomina, a su vez, *Núcleo de Poisson*:

Núcleo de Poisson

$$N_p = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\varphi - \theta) + \rho^2}$$

7.4 - Propiedades del Núcleo de Poisson.

Valores característicos del Núcleo de Poisson:

- Para $\rho = 0$, el núcleo de Poisson vale:

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\varphi - \theta) + \rho^2} = 1$$

- Su límite para $\rho \to 1$, y $\varphi \neq \theta$, es:

$$\lim_{\rho \to 1} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\varphi - \theta) + \rho^2} = 0$$

- El límite para $\rho \to 1$ y $\varphi = \theta$ tiende a infinito.

En efecto, si $\varphi = \theta$, entonces $\cos(\varphi - \theta) = 1$, y

$$\therefore \qquad \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho + \rho^2} = \frac{1 - \rho^2}{(1 - \rho)^2} = \frac{(1 - \rho)(1 + \rho)}{(1 - \rho)(1 - \rho)} = \frac{(1 + \rho)}{(1 - \rho)} \to \infty$$

- Para cualquier valor de ρ, el núcleo de Poisson alcanza su valor máximo cuando $\varphi = \theta$:

Lo probaremos a continuación: Ya vimos en el punto anterior qué ocurre cuando r es igual a 1. Trataremos de determinar en qué condiciones, para cualquier otro valor de ρ, el valor del núcleo es máximo. Esto evidentemente se logrará cuando el denominador sea mínimo. Es decir, si llamamos $\theta - \varphi = \tau$, cuando

$$1 - 2\rho\cos(\varphi - \theta) + \rho^2 = 1 - 2\rho\cos(\tau) + \rho^2 = \text{mínimo}$$

O sea, derivando e igualando a cero:

$$\frac{d}{d\tau}\left[1 - 2\rho\cos(t) + \rho^2\right] = 2\rho \operatorname{sen}\tau = 0$$

$\therefore \qquad \tau = 0 \qquad$ y por tanto, $\quad \varphi = \theta$

- Límite para $\rho \to \infty$:

El valor absoluto del límite del núcleo de Poisson cuando ρ tiende a infinito es igual a 1. Efectivamente:

$$\lim_{\rho \to \infty} \left| \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \theta) + \rho^2} \right| = 1$$

Y esto, de acuerdo con la propiedad anterior, ocurre cuando $\varphi = \theta$

- Finalmente, el área bajo el núcleo de Poisson, entre 0 y 2π, es en todos los casos igual a 2π. Para demostrarlo, hagamos

$$u(\rho, \varphi) = 1$$

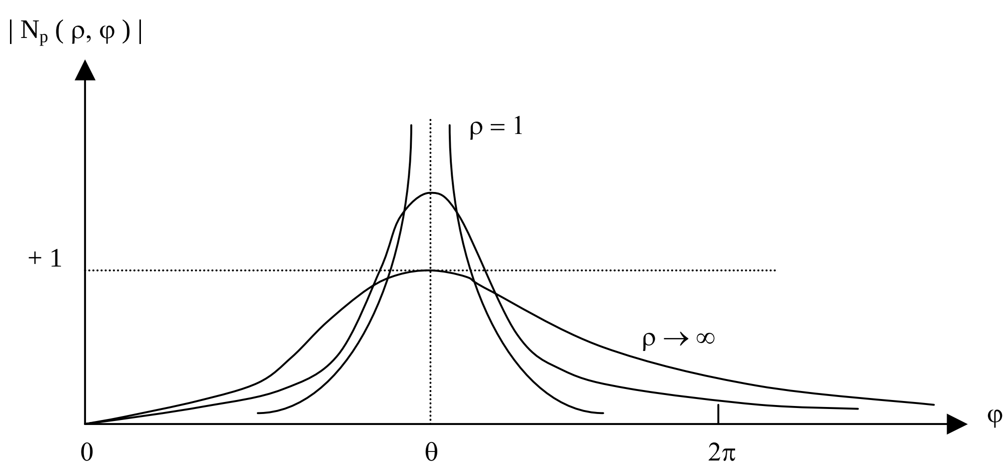
En tal caso, la (7.8) resulta simplificada como vemos aquí abajo:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \theta) + \rho^2} \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_p \, d\theta$$

Es decir que la integral queda reducida a la integral del núcleo exclusivamente. Y, despejando, vemos que, efectivamente

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\varphi - \theta) + \rho^2} \, d\theta = 2\pi$$

El gráfico siguiente reproduce el núcleo de Poisson, poniendo en evidencia algunas de las propiedades estudiadas hasta aquí:

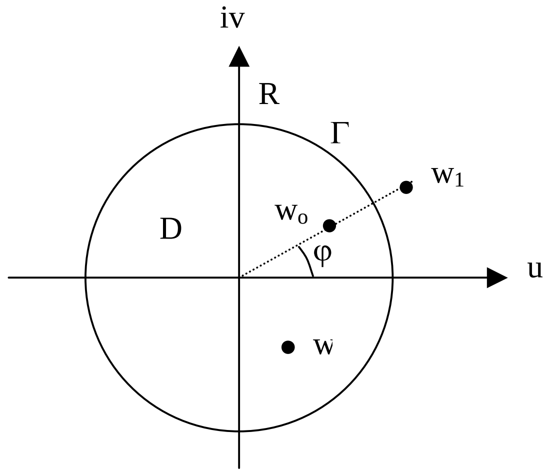


7.5 - El Problema de Dirichlet en un recinto circular.

Como queda dicho, el Problema de Dirichlet consiste en hallar una función armónica en el interior de un dominio dado, tal que cumpla con ciertas *Condiciones de Contorno* en la frontera de aquel.

Vamos a estudiar a partir de aquí el Problema de Dirichlet en dos dominios diferentes, cada uno de ellos adecuado para su aplicación a diferentes problemas de la Física. Dichos dominios son, respectivamente, el interior de un círculo, y un semiplano.

Sea un círculo de radio R, ubicado en el plano complejo w de coordenadas u y v, con centro en el origen de coordenadas:



Llamaremos D al dominio constituido por los puntos del círculo, incluida la circunferencia frontera Γ. También, denominaremos genéricamente w a los puntos de tal dominio.

Consideremos una función f (w), analítica en D. Si w_o es un punto determinado del dominio D, aplicando el teorema de la integral de Cauchy podemos decir que

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - w_o}\, dw$$

Llamemos w_1 a un punto definido por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} |w_1| = \dfrac{R^2}{|\overline{w_o}|} \\[2ex] \arg w_o = \arg w_1 = \varphi \end{cases}$$

Entonces, como

$$|w_o| = |\overline{w_o}|$$

podemos afirmar también que

$$| w_1 | = \frac{R^2}{| w_o |}$$

Por otra parte, como

$| w_o | < R$, porque el punto w_o es interior al círculo, deberá ser:

$| w_1 | > R$

De lo anterior, deducimos que, como f (w) es por definición analítica en el interior del círculo, y el punto w_1 es exterior al mismo, la función

$$\frac{f (w)}{w - w_1}$$

es también analítica en el interior del círculo, pues el punto singular $w = w_1$ es exterior a aquel. Aplicando el teorema de Cauchy, tenemos:

$$\frac{1}{2 \pi i} \oint_\Gamma \frac{f (w)}{w - w_1} \, d w = \frac{1}{2 \pi i} \oint_\Gamma \frac{f (w)}{w - \dfrac{R^2}{\overline{w_o}}} \, d w = 0$$

Restando de f (w_o) este valor, nulo, podemos decir que la misma es también igual a:

$$f (w_o) = \frac{1}{2 \pi i} \oint_\Gamma \left(\frac{1}{w - w_o} - \frac{1}{w - \dfrac{R^2}{\overline{w_o}}} \right) f (w) \, d w$$

$$\therefore \qquad f (w_o) = \frac{1}{2 \pi i} \oint_\Gamma \left(\frac{1}{w - w_o} - \frac{\overline{w_o}}{\overline{w_o}\, w - R^2} \right) f (w) \, d w$$

$$\therefore \qquad f (w_o) = \frac{1}{2 \pi i} \oint_\Gamma \frac{\overline{w_o}\, w - R^2 - \overline{w_o}\, w + \overline{w_o}\, w_o}{(w - w_o) (\overline{w_o}\, w - R^2)} f (w) \, d w$$

Si llamamos $\rho = | w_o |$, entonces:

$$w_o \, \overline{w_o} = | w_o |^2 = \rho^2$$

$$f (w_o) = \frac{1}{2 \pi i} \oint_\Gamma \frac{\rho^2 - R^2}{(w - w_o) (\overline{w_o}\, w - R^2)} f (w) \, d w$$

Recordemos que w es la designación genérica que utilizamos para referirnos a cualquiera de los puntos del recinto cerrado D. Por lo tanto, la ecuación anterior es asimismo válida para cualquier punto de la circunferencia Γ, que forma parte también del mismo recinto. Llamemos σ a un punto cualquiera de dicha circunferencia. La expresión anterior continúa en consecuencia siendo válida si reemplazamos en ella w por σ:

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{\rho^2 - R^2}{(\sigma - w_o)(\overline{w_o}\,\sigma - R^2)} f(\sigma)\, d\sigma$$

Hagamos ahora:

$$\sigma = R e^{i\theta} \quad \therefore \quad f(\sigma) = f(R, \theta)$$

y como

$$w_o = \rho e^{i\varphi} \quad \therefore \quad \overline{w_o} = \rho e^{-i\varphi}$$

Como la curva suave sobre la que queremos calcular la integral curvilínea es precisamente la circunferencia, y estamos llamando σ a los puntos de la misma, tomando un desplazamiento infinitesimal $d\sigma$ sobre dicha circunferencia a partir del punto σ, debe verificarse que

$$d\sigma = R i e^{i\theta} d\theta$$

Al reemplazar todos estos valores en la última integral, llegamos a:

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - R^2)\, R i\, e^{i\theta}}{(R e^{i\theta} - \rho e^{i\varphi})(\rho e^{-i\varphi} R e^{i\theta} - R^2)} f(R, \theta)\, d\theta$$

$$\therefore \qquad f(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - R^2)\, R i\, e^{i\theta}}{R^2 \rho e^{i(2\theta - \varphi)} - R^3 e^{i\theta} - \rho^2 R e^{i\theta} + R^2 \rho e^{i\varphi}} f(R, \theta)\, d\theta$$

Dividamos ahora numerador y denominador por $i R e^{i\theta}$, para obtener:

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - R^2)}{R \rho e^{i(\theta - \varphi)} - R^2 - \rho^2 + R \rho e^{-i(\theta - \varphi)}} f(R, \theta)\, d\theta$$

O, también:

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho^2)}{R^2 + \rho^2 - 2 R \rho \cos(\theta - \varphi)} f(R, \theta)\, d\theta$$

Al descomponer $f(w_o)$ y $f(R, \theta)$ como suma de sus respectivas partes real e imaginaria, obtenemos:

$$u(\rho, \varphi) + i\, v(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho^2)[u(R, \theta) + i\, v(R, \theta)]}{R^2 + \rho^2 - 2 R \rho \cos(\theta - \varphi)}\, d\theta$$

Ahora igualemos las partes reales de ambos miembros de la igualdad. Entonces:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho^2)\, u(R, \theta)}{R^2 + \rho^2 - 2 R \rho \cos(\theta - \varphi)}\, d\theta \qquad (7.9)$$

En el supuesto que el dominio D fuera el círculo de radio unitario, es decir, si

$$R = 1,$$

teniendo en cuenta, además, que

$$\cos(\theta - \varphi) = \cos(\varphi - \theta)$$

la ecuación (7.9) quedaría así

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho^2)\, u(\theta)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta$$

Pero ésta es, justamente, la Integral de Poisson (7.8).

Son importantes las aplicaciones físicas que se pueden extraer a partir de la solución al Problema de Dirichlet. Por ejemplo, supongamos un cilindro metálico hueco cuyo interior está constituido por material dieléctrico. La Integral de Poisson permite conocer cuál será la distribución del potencial en los distintos puntos del dieléctrico [la función armónica $u(\rho, \varphi)$], cuando se aplica un determinado potencial a la cubierta metálica (Condición de contorno o de frontera).

De manera similar, si por ejemplo queremos conocer cómo se propaga el calor sobre una lámina conductora al aplicar en su borde una determinada temperatura, podemos recurrir a la solución del *Problema de Dirichlet en el Semiplano*, que veremos a continuación.

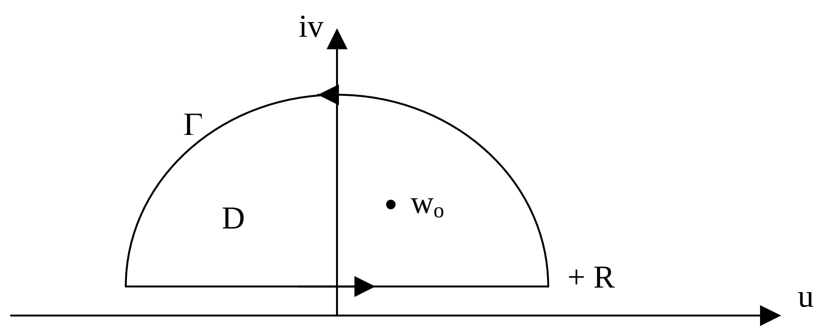
7.6 - El Problema de Dirichlet en el Semiplano.

Sea una función

$$f(w) = \Phi(u, v) + i\,\Psi(u, v)$$

en el plano w de coordenadas u y v, analítica para todo $v \geq 0$.

Consideremos ahora el contorno de la figura, dentro del semiplano superior, donde se satisface tal condición:



Es evidente que cuando R tiende a infinito, el dominio D encerrado por el contorno Γ de la figura abarca la totalidad del semiplano superior. Es decir, el dominio para el cual es $v \geq 0$.

Llamemos w_o a un determinado punto del dominio D.

$$w_o \in D$$

Como en el caso anterior, podemos definir una función $f(w_o)$, mediante la integral de Cauchy:

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{w - w_o}\, dw \tag{7.10}$$

Por el contrario, el conjugado de w_o no pertenece a D. Ello nos permite inferir que debe ser nula la integral:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{w - \overline{w_o}}\, dw = 0$$

Restando esta ecuación de la (7.10), resulta

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \left[\frac{f(w)}{w - w_o} - \frac{f(w)}{w - \overline{w_o}} \right] dw \tag{7.11}$$

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{w - \overline{w_o} - w + w_o}{(w - w_o)(w - \overline{w_o})}\, f(w)\, dw \tag{7.12}$$

Como

$$w_o = \rho\, e^{i\varphi}$$

será

$$w_o \,.\, \overline{w_o} = \rho^2$$

w_o es la denominación genéricva que utilizamos para designar cualquier punto interior al dominio D. Para evitar confusiones, llamaremos x e y a las coordenadas de w_o[(1)]. Es decir:

$$w_o = x + i y$$

Entonces

$$w_o - \overline{w_o} = 2 i y$$

y

$$w_o + \overline{w_o} = 2 x$$

Reemplazando estos valores en la (7.12):

$$f(w_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{2 i y}{w^2 + \rho^2 - 2 w x}\, f(w)\, dw \tag{7.13}$$

Teniendo en cuenta el contorno sobre el cual debemos resolver la integral curvilínea, y llamando C a la curva superior del mismo, haremos:

(1) Como w_o es un punto genérico, las coordenadas dependen de cada punto w_o, luego son *variables*. Por eso las designamos x e y en lugar de u_o y v_o, denominación ésta última más apropiada para designar valores constantes.

$$f(w_o) = \frac{y}{\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{f(w)\,dw}{w^2 + \rho^2 - 2wx} + \frac{y}{\pi} \int_{C} \frac{f(w)\,dw}{w^2 + \rho^2 - 2wx}$$

En la primera integral podemos reemplazar w = u, pues sobre el eje de abscisas, v es siempre igual a cero:

$$f(w_o) = \frac{y}{\pi} \int_{-R}^{+R} \frac{f(u)\,du}{u^2 + \rho^2 - 2ux} + \frac{y}{\pi} \int_{C} \frac{f(w)\,dw}{w^2 + \rho^2 - 2wx}$$

En cuanto a la segunda integral, si w es un punto cualquiera del contorno C, podemos escribir:

$$\int_{C} \frac{f(w)\,dw}{w^2 + \rho^2 - 2wx} = \int_{C} \frac{f(w)\,dw}{R^2 e^{2i\theta} + \rho^2 - 2Rxe^{2i\theta}}$$

Si la función f (w) se mantiene acotada en todo el dominio D, al tender R a infinito la integral tiende a cero.

En consecuencia, quedará finalmente:

$$f(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)\,du}{u^2 + \rho^2 - 2ux}$$

Igualando las partes reales de las funciones complejas que aparecen en los dos miembros de esta ecuación, podemos escribir:

$$\Phi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u, o)\,du}{u^2 + \rho^2 - 2ux} = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u, o)\,du}{u^2 + x^2 + y^2 - 2ux}$$

$$\Phi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(u, o)\,du}{(u - x)^2 + y^2} \qquad (7.14)$$

Una ecuación similar se obtiene al igualar las partes imaginarias.

La ecuación (7.14) permite conocer el valor de la función armónica Φ (x, y) en cualquier punto del semiplano superior, con sólo conocer el valor que toma la misma sobre el eje real, es decir, bastará conocer Φ (u, o).

7.7 - Problemas.

7.7.1 - Hallar la función que define la distribución de potencial en el interior de un círculo de radio unitario, si el valor en la periferia del mismo es

$$u(1, \varphi) = Vo \operatorname{sen} \theta$$

Solución: El desarrollo en serie de la función pedida, $u(\rho, \varphi)$, es:

$$u(\rho, \varphi) = \alpha_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \operatorname{sen} n\varphi)$$

Aquí, R es igual a 1. Además, por ser la función seno impar, los coeficientes α_n son todos nulos.

La fórmula para calcular los coeficientes β_n es:

$$\beta_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \operatorname{sen} n\varphi \; d\varphi = -\frac{V_o}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \varphi \,.\, \operatorname{sen} n\varphi \,.\, d\varphi$$

En las tablas de integrales encontramos

$$\int \operatorname{sen} x \,.\, \operatorname{sen} nx \,.\, dx = \frac{\operatorname{sen}(n-1)x}{2(n-1)} - \frac{\operatorname{sen}(n+1)x}{2(n+1)}$$

Si n, número entero, es distinto de 1, al integrar entre 0 y 2π la integral es nula por tratarse de una función seno en un número exacto de períodos.

Si n = 1, tenemos:

$$\beta_n = -\frac{V_o}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \; d\varphi$$

Volviendo a las tablas de integrales, hallamos

$$\int \operatorname{sen}^2 \varphi \; d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2\varphi$$

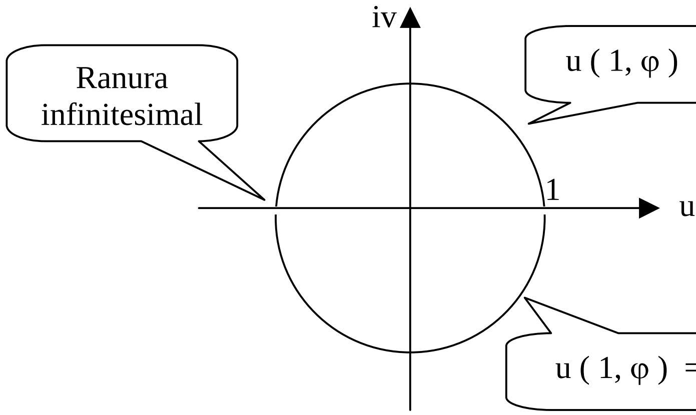
Por tanto:

$$\beta_1 = -\frac{V_o}{\pi} \pi = -V_o$$

Finalmente, la función armónica buscada es:

$$u(\rho, \varphi) = Vo\, \rho \operatorname{sen} \theta$$

7.7.2 - Hallar la distribución de potencial en el interior de un disco circular de material dieléctrico, cuya circunferencia exterior está formada por dos placas metálicas semicirculares iguales (Ver la figura), separadas entre sí por una ranura de dimensión muy reducida. A la placa superior se le aplica un potencial V_o, mientras que la inferior es mantenida a potencial cero.



Solución:

Aquí, los coeficientes del desarrollo en serie son:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} V_o \, d\varphi = \frac{V_o}{2}$$

$$\alpha_n = a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_o \cos n\varphi \, d\varphi = 0$$

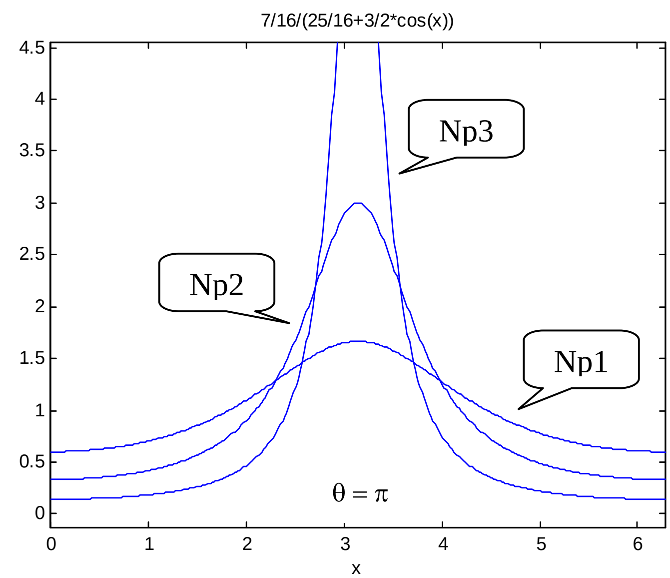
$$\beta_n = - b_n = - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_o \operatorname{sen} n\varphi \, d\varphi = - \frac{V_o}{n\pi} \cos n\varphi \Big|_0^{\pi}$$

$$\beta_n = \frac{2 V_o}{n\pi} \qquad \text{con } n \text{ impar.}$$

Aplicaciones matlab

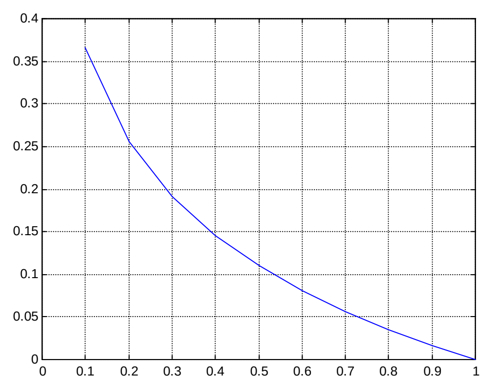
- *El Núcleo de Poisson:*

```
» % Representar el Núcleo de Poisson en función de rho y phi:
» % Np = (1 - rho^2)/(1 + rho^2 - 2*rho*cos (phi-theta))
» % Hagamos por ejemplo, theta = pi
» % Para utilizar la función EZPLOT debemos llamar phi = x.
» % También, pára simplificar las fórmulas, llamaremos rho = r
»
» syms x
» r1=0.25
r1 =    0.2500
» Np1 = (1 - r1^2)/(1 + r1^2 - 2*r1*cos (x-pi))
Np1 = 15/16/(17/16+1/2*cos(x))
» r2 = 0.5
r2 =    0.5000
» Np2 = (1 - r2^2)/(1 + r2^2 - 2*r2*cos (x-pi))
Np2 =  3/4/(5/4+cos(x))
» r3 = 0.75
r3 =    0.7500
» Np3 = (1 - r3^2)/(1 + r3^2 - 2*r3*cos (x-pi))
Np3 =  7/16/(25/16+3/2*cos(x))
»
» % Representación gráfica:
» ezplot (Np1, [0, 2*pi])
»
» % Para superponer las diferentes curvas en un mismo gráfico, hacemos:
» hold on
» ezplot (Np2, [0, 2*pi])
» ezplot (Np3, [0, 2*pi])
```



- *Resolver la ecuación de Poisson -div(grad(u)) =1, en el círculo unidad, al excitar con un impulso en el instante inicial.*

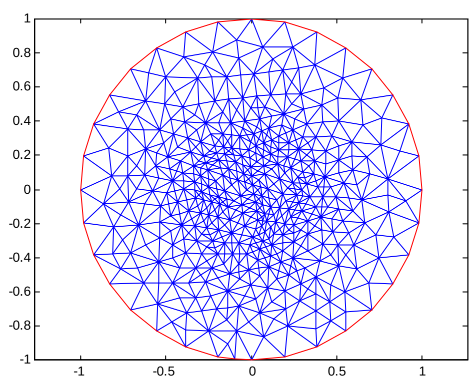
```
» % Resolver la ecuación de Poisson: -div(grad(u)=1, en un disco de radio unitario
» % La función Matlab: u=ASSEMPDE (b,p,e,t,c,a,f), es solución de ecuaciones del tipo
» % f=-div(c*grad(u)+a*u.
» % En el caso que vamos a encarar podemos ver que los parámetros
» % c, a, y f valen, respectivamente:
» % c = 1, a = 0, y f = 1
» c=1;
» a=0;
» f=1;
» % Si el potencial u(r), en el contorno, r=1, es igual a cero, la solución exacta es:
» % u(r) = - 1/(2*pi)*log (r)
» % u (r) define el Potencial en el interior del disco: 0 <= r <= 1
» r = [0 : .1 : 1];
» u = -1/(2*pi)*log (r)
Warning: Log of zero.
u =
  Columns 1 through 7
     Inf      0.3665    0.2561    0.1916    0.1458    0.1103    0.0813
  Columns 8 through 11
    0.0568    0.0355    0.0168         0
»
» plot (r,u)
» grid
»
»
»
»
»
»
»
»
»
```



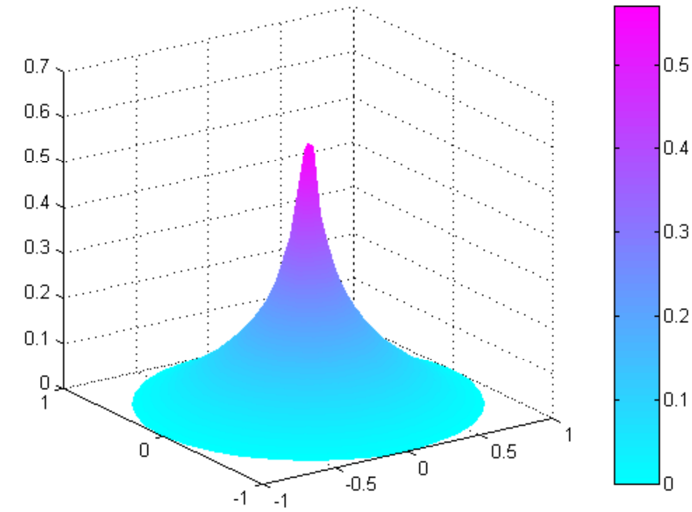

```
» % Por razones de simetría, esta curva se repite para cualquier dirección (Para
     cualquier valor del ángulo phi). Ver la solución aproximada,
» % en el problema siguiente.
» % La solución es entonces la superficie de revolución de la curva al girar sobre el
     eje vertical que pasa por el origen de coordenadas: El eje r = 0.
»
```

- *Veremos a continuación la forma completa que adopta la solución de la ecuación de Poisson en el disco unitario:*

```
» % Expresamos la ecuación así:  -div(grad(u)) = delta(x,y)
» % El segundo miembro es justamente la función impulso.
» % Queremos resolverla en el círculo unitario, con la condición de borde: u(1) = 0
» % La solución exacta, según vimos en el problema anterior es: u(r) = - 1/(2*pi)*log (r)
» % que según se vio, tiene un punto singular (polo) en el origen de coordenadas
» % Según esto, salvo en la proximidad del origen, es posible representar la forma que
» % reviste dicha solución recurriendo a una red de triángulos en el interior del círculo.
» % En lo que sigue trataremos de ver:
» % La malla de triángulos sobre la cual, por aproximaciones sucesivas,
» % calcula el programa la respuesta.
» % La forma que reviste la respuesta completa, y
» % La representación del error en cada punto.
» %
» % Definición del problema:
g='circleg';      % Algoritmo para la generación del círculo unitario
b='circleb1';   % Condición de contorno: u1 = 0 sobre el círculo unitario:
» % Valor de los parámetros de la ecuación:
c=1; a=0;
f='circlef';
» % La última retorna 1/area para el triángulo que contiene el origen y 0 para los demás.
» % Matlab utiliza un algoritmo propio, denominado tripick,
» % para separar los triángulos en los que el error es mayor que la tolerancia: errf>tol.
[u,p,e,t]=adaptmesh(g,b,c,a,f,'tripick','circlepick','maxt',1000,'par',1e-3);
Number of triangles: 254
Number of triangles: 503
Number of triangles: 753
Number of triangles: 1005
Maximum number of triangles obtained
» % Veamos ahora la configuración de la malla de triángulos en el círculo:
pdemesh(p,e,t); axis equal
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
```



```
» % Representación de la solución:
» pdeplot(p,e,t,'xydata',u,'zdata',u,'mesh','off');
» grid
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
»
```




```
» % Representación del error:
» x=p(1,:)';
y=p(2,:)';
r=sqrt(x.^2+y.^2);
» % Recordamos que la solución exacta es:
uu = - log(r)/2/pi;
» % La ecuación siguiente representa el error: u - uu:
pdeplot(p,e,t,'xydata',u -uu,'zdata',u-uu,'mesh','off');
» grid
»
```